Chap3. Equations et Inéquations du 2^{nd} degré

I Trinôme du 2^{nd} degré

1. Définition

Définition
Toute expression de la forme : ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ est appelée trinôme du 2^{nd} degré (ou polynôme du 2^{nd} degré). Les réels a, b et c sont appelés les coefficients du trinôme

Exemple

$P(x)=3x^2-5x+1; a=3, b=-5, c=1$; $Q(x)=x^2+2x; a=1, b=2, c=0$

$R(x)=2x^2+6; a=2, b=0, c=6$; $T(x)=5x^2; a=5, b=0, c=0$

2. Forme Canonique du trinôme

Soit le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

La forme canonique du trinôme P est l'écriture $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et le nombre réel $\Delta=b^2-4ac$ est le discriminant de P.

Exemple :

Calculer Δ puis donner la forme canonique des trinômes $P(x)=3x^2+2x+1$ et $Q(x)=x^2-x+3$

Exercice d'application :

Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

$P(x)=3x^2-6x+5$ $Q(x)=x^2+5x+3$

II Equation du 2^{nd} degré

1. Définition

Définition
Toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ est appelée équation du 2^{nd} degré à une inconnue.

Exemple :

$3x^2-x+2=0$: équation complète

$x^2-3x=0$ et $x^2-4=0$ sont des équations incomplètes

2. Résolution d'une équation du 2nd degré

Théorème

Soit l'équation du 2nd degré $ax^2+bx+c=0$

Si $\Delta \succ 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution double : $x_0=\frac{-b}{2a}$

Si $\Delta \prec 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $x^2-3x+2=0$ 2) $x^2+x+1=0$ 3) $x^2+2x+1=0$

3. Somme et produit des racines

racine d'un trinôme

On dit qu'un réel α est une racine du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ si $P(\alpha)=0$.

Exemple:

Montrer que 1 et 2 sont des racines du trinôme $P(x)=-x^2+3x-2$

Somme et produit

Théorème1

Si le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines distinctes ou confondues alors la somme des racines est $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et le produit des racines est $S=x_1x_2=\frac{c}{a}$

Exemple1 :

Le trinôme $P(x)=2x^2+5x+3$ admet deux racines distinctes x_1,x_2. Sans chercher les racines, trouver la somme S et le produit P des racines.

Théorème2

Pour trouver deux nombres x et y dont la somme est S et le produit P alors on résout l'équation : $x^2-Sx+P=0$

Exemple :

1) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 3 et le produit est égal à -10.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases}$

4. Factorisation d'un trinôme

Théorème

Soit le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$

- Si $\Delta \succ 0$, la factorisation du trinôme est : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $\Delta = 0$, la factorisation du trinôme est : $P(x)=a(x-x_0)^2$
- Si $\Delta \prec 0$ le trinôme n'est pas factorisable.

Exercice d'application :

Factoriser si possible les trinômes suivants

1) $P(x)=4x^2-5x+1$ 2) $P(x)=3x^2+6x+3$ 3) $P(x)=2x^2-x+1$

II Inéquation du second degré

1. Signe d'un trinôme

Pour étudier le signe d'un trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$, on calcul Δ ensuite utiliser l'un des tableaux suivants

❖ Si $\Delta \succ 0$

x	$-\infty$		x1		x2		$+\infty$
ax²+bx+c		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a à l'intérieur des racines

❖ Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x0		$+\infty$
ax²+bx+c		signe de a	0	signe de a	

Le trinôme est du signe de a dans les deux intervalles

❖ Si $\Delta \prec 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax²+bx+c		signe de a	

Le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$

Exemple : Etudier le signe des trinômes suivants

1) $-x^2+4x-4$ 2) $-3x^2+4x-1$ 3) x^2+4x+1

2. Résolution d'une inéquation du 2^{nd} degré

Résoudre une inéquation du 2^{nd} degré, revient à chercher le signe du trinôme et ensuite déduire l'ensemble des solutions.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1) $2x^2 - 5x - 3 \prec 0$ 2) $9x^2 + 6x + 1 \succ 0$ 3) $x^2 - x + 2 \geq 0$